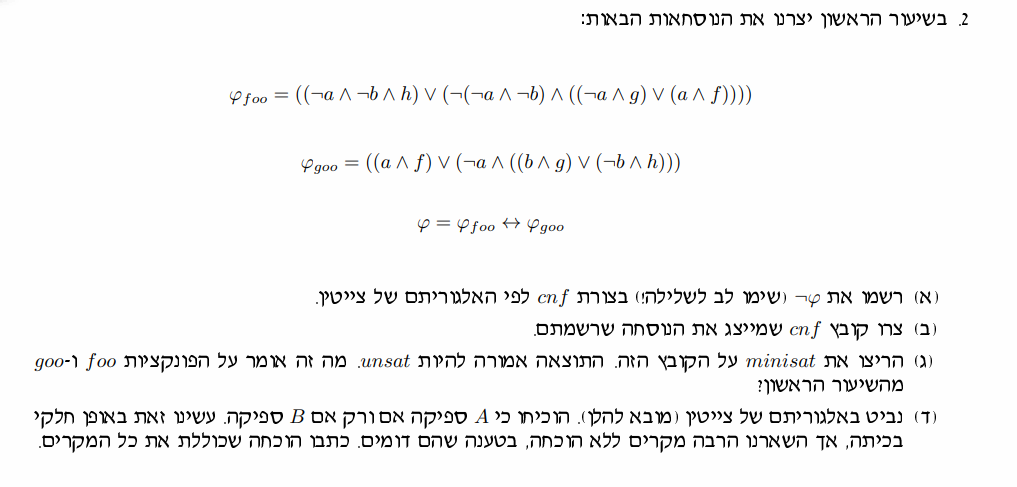
**הסקה אוטומטית ושימושיה – תרגיל 1**

**שאלה 2**



1. *לפי אלגוריתם צייטין אנו צריכים להגדיר לכל תת נוסחה c של משתנה חדש , ואז נכתוב את בצורת cnf באופן הבא: .*

*ראשית נמצא את כל תתי הנוסחאות של (לפי הגדרת תתי נוסחאות שראינו בהרצאה):*

נמצא את *:*

*סה"כ קיבלנו (לאחר מחיקת כפילויות):*

כעת נמצא את *:*

*סה"כ קיבלנו (לאחר מחיקת כפילויות):*

*נציב את תתי הנוסחאות שמצאנו בנוסחה הראשית ונקבל (לאחר מחיקת כפילויות):*

*נסמן כל אחת מתתי הנוסחאות של :*

כמו כן, *נגדיר לכל תת נוסחה c של משתנה חדש*  .

כאמור, הנוסחה שנכתוב היא: *. לכן כעת נמצא לכל תת נוסחה cשל את .*

*סה"כ נקבל שהנוסחה של בצורת CNF לפי האלגוריתם של צייטיין היא:*

כאשר החלק של הוא שרשור של AND בין כל ה-E(C) עבור כל תת פסוקית C של , ואת החלק הזה הראנו לעיל (לא כתבנו שוב את החישובים הסופיים, מאחר והם כתובים בעמוד הקודם) – כל החלקים שמסומנים בירוק.

1. ראשית נמספר את המשתנים של הנוסחה:

*כעת הקובץ בפורמט DIMACS עם סיומת cnf נראה כך:*

*2b.cnf*

*p cnf 27 59*

*27 0*

*-17 12 0*

*-12 17 0*

*-22 -17 0*

*17 22 0*

*-18 13 0*

*-13 18 0*

*-23 -18 0*

*18 23 0*

*-19 14 0*

*-14 19 0*

*-20 15 0*

*-15 20 0*

*-21 16 0*

*-16 21 0*

*-1 3 0*

*-1 21 0*

*-3 -21 1 0*

*-2 4 0*

*-2 5 0*

*-4 -5 2 0*

*-3 22 0*

*-3 23 0*

*-22 -23 3 0*

*-4 -3 0*

*3 4 0*

*-5 6 7 0*

*-6 5 0*

*-7 5 0*

*-6 22 0*

*-6 20 0*

*-22 -20 6 0*

*-7 17 0*

*-7 19 0*

*-17 -19 7 0*

*-8 22 0*

*-8 9 0*

*-22 -9 8 0*

*-9 10 11 0*

*-10 9 0*

*-11 9 0*

*-10 18 0*

*-10 20 0*

*-18 -20 10 0*

*-11 23 0*

*-11 21 0*

*-23 -21 11 0*

*-25 1 2 0*

*-1 25 0*

*-2 25 0*

*-24 7 8 0*

*-7 24 0*

*-8 24 0*

*-26 -25 24 0*

*-26 25 -24 0*

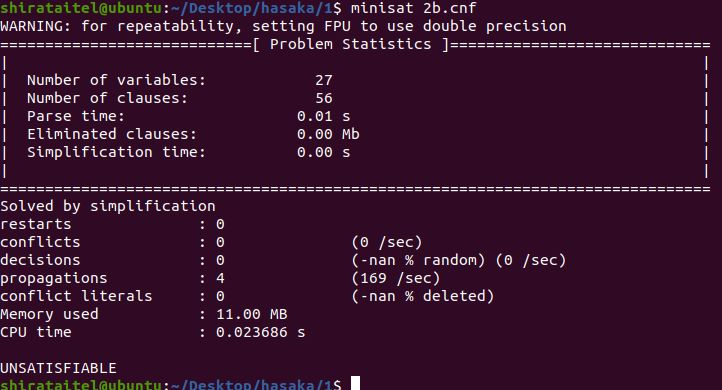
*26 -25 -24 0*

*26 25 24 0*

*-27 -26 0*

*26 27 0*

1. הרצנו את minisat על הקובץ 2b.cnf והתוצאה אכן יצאה unsat, כפי שניתן לראות בצילום המסך הבא:



מאחר ו- *לא ספיקה, אז נובע ש- תקפה (לפי משפט שלמדנו בהרצאה), כלומר תמיד ספיקה לכל השמה ומחזירה true.*

*הנוסחה היא מהצורה: , לכן מכיוון שהיא תמיד מחזירה true, נובע ש-foo ו-goo הן שקולות (כי האם ורק אם מתקיים), כלומר לכל קלט שתיהן יחזירו את אותו הפלט.*

1. צ"ל: A ספיקה אם ורק אם B ספיקה (לפי האלגוריתם של צייטין).

הוכחה:

נוכיח את הטענה באמצעות גרירה דו כיוונית.

כיוון ראשון:

*נניח B ספיקה, ונוכיח A ספיקה.*

*תהי V השמה שמספקת את B, כלומר . נוכיח את הטענה שלכל תת נוסחה c של A, מתקיים: , ובכך נוכיח ש-A ספיקה. הסבר: B היא מהצורה הבאה: , ולכן אם V מספקת את B, בפרט מתקיים , ואז לפי הטענה - נקבל ש-, ולכן , כלומר כדרוש.*

*נוכיח באינדוקציה מבנית על c את הטענה . הוכחה:*

***בסיס האינדוקציה***

1. *C הוא משתנה – אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: , ומכיוון ש- אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:*
2. *אם – מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית , נובע ש- .*
3. *אם – מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית , נובע ש- .*

*סה"כ קיבלנו כדרוש.*

1. *C הוא true – אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B:, ומכיוון ש- אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. לפי הפסוקית , נובע ש- , ולכן כדרוש.*
2. *C הוא false – אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B:, ומכיוון ש- אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. לפי הפסוקית , נובע ש- , ולכן כדרוש.*

***צעד האינדוקציה***

1. *C הוא - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: , ומכיוון ש- אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:*
2. *אם – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- , לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית , נובע ש- .*
3. *אם – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- , לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית , נובע ש- .*

*סה"כ קיבלנו כדרוש.*

1. *C הוא - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B:, ומכיוון ש- אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:*
2. *אם – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- , לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית , נובע ש- .*
3. *אם – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- או או שניהם. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית :, נובע ש- .*

*סה"כ קיבלנו כדרוש.*

1. *C הוא - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B:, ומכיוון ש- אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:*
2. *אם – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- או או שניהם. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית :, נובע ש- .*
3. *אם – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- , לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית , נובע ש- .*

*סה"כ קיבלנו כדרוש.*

1. *C הוא - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B:, ומכיוון ש- אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:*
2. *אם – נחלק למקרים:*

* *, ו- - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית :, נובע ש- .*
* *, ו- - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית :, נובע ש- .*
* *, ו- - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית :, נובע ש- .*

1. *אם – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- , לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית , נובע ש- .*

*סה"כ קיבלנו כדרוש.*

1. *C הוא - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B:*

*ומכיוון ש- אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:*

1. *אם – נחלק למקרים:*

* *, ו- - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית :, נובע ש- .*
* *, ו- - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית :, נובע ש- .*

1. *אם – נחלק למקרים:*

* *, ו- - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית :, נובע ש- .*
* *, ו- - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- . מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית :, נובע ש- .*

*סה"כ קיבלנו כדרוש.*

*סה"כ הוכחנו שלכל תת נוסחה c של A, מתקיים: , ולכן A ספיקה לפי ההסבר לעיל.*

כיוון שני:

*נניח A ספיקה, ונוכיח B ספיקה.*

*תהי V השמה שמספקת את A, כלומר . נוכיח ש-B ספיקה על ידי שנגדיר השמה חדשה V' ונוכיח שהיא מספקת את B. נגדיר את V' באופן הבא, V' מקבלת קלט כלשהו a ומחזירה את הפלט לפי שני המקרים הבאים:*

1. *אם a משתנה ב-A אז:*
2. *אם a הוא קלט מהצורה עבור תת נוסחה C כלשהי ב-A, אז:*

*כאמור צריך להוכיח:*

*הוכחה:*

*B היא מהצורה הבאה:*

*נוכיח ש- בשני שלבים:*

1. *נראה ש-*
2. *נראה ש- לכל*

***שלב ראשון***

*מכיוון ש- הוא קלט מהצורה שתואמת למקרה השני בהגדרת V', אזי מתקיים:* *. כמו כן, לפי ההנחה A ספיקה לפי V , ולכן מתקיים , ולכן כדרוש.*

***שלב שני***

*תהי , נחלק למקרים:*

1. *C הוא משתנה – אז מתקיים:*

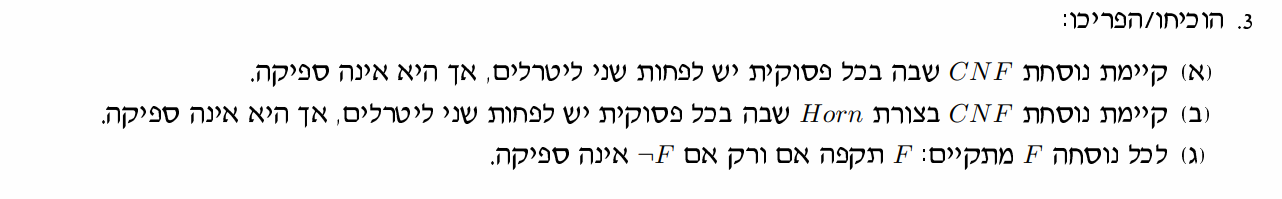
*נחלק למקרים:*

1. *– מכיוון ש-C הוא משתנה שמופיע ב-A, אז לפי הגדרת V', כמו כן, גם לפי הגדרת V', לכן מתקיים , לכן כל אחת מהפסוקיות ב- במקרה הזה מסתפקת.*
2. *– מכיוון ש-C הוא משתנה שמופיע ב-A, אז לפי הגדרת V', כמו כן, גם לפי הגדרת V', לכן מתקיים , לכן כל אחת מהפסוקיות ב- במקרה הזה מסתפקת.*

*סה"כ מתקיים כדרוש.*

1. *C הוא true*

**שאלה 3**



1. הוכחה:

נראה שקיימת נוסחת CNF שבכל פסוקית שלה יש לפחות 2 ליטרלים, והיא אינה ספיקה.

להלן הנוסחה:

נוכיח שהיא אינה ספיקה על ידי כך שנעבור על כל האפשרויות להשמות:

בהשמה זו הפסוקית  *לא מסופקת כי:*

*ולכן כל הנוסחה לא מסופקת.*

בהשמה זו הפסוקית  *לא מסופקת כי:*

בהשמה זו הפסוקית  *לא מסופקת כי:*

בהשמה זו הפסוקית  *לא מסופקת כי:*

*כלומר, עברנו על כל ההשמות האפשריות, ובכל אחת מהן יש פסוקית שלא מסופקת, וכתוצאה מכך כל הנוסחה לא מסופקת, ולכן הראנו שהנוסחה לא ספיקה.*

1. *הפרכה:*

*נוכיח שלא קיימת נוסחת CNF בצורת HORN שבה בכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים והיא לא ספיקה, כלומר נוכיח שאם בנוסחת HORN, נסמנה ב-F, בכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים אז F ספיקה.*

*תהי השמה כך שלכל משתנה , , כלומר ההשמה מציבה לכל משתנה את הערך false.*

*נוכיח ש-, כלומר ההשמה v מספקת את כל הפסוקיות ב-F.*

*תהי c פסוקית ב-F, נראה ש- :*

*לפי הנתון בטענה שלכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים, ידוע שב-c גם יש לפחות 2 ליטרלים, ומהנתון ש-F היא נוסחת HORN, ידוע שכל פסוקית יש לכל היותר ליטרל אחד חיובי, ובפרט ב-c. לכן קיים משתנה כך שהשלילה שלו - מופיעה ב-c. לפי הגדרת v מתקיים: , ולכן , ולכן , כלומר v מספקת את c, ולכן , כלומר ההשמה v מספקת את כל הפסוקיות ב-F.*

*סה"כ הראנו שאם בנוסחת HORN בכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים אז היא ספיקה, ובכך הפרכנו את הטענה.*

1. *הוכחה:*

*נוכיח באמצעות גרירה דו כיוונית.*

*תהי נוסחה F, נוכיח את הטענה הבאה: תקפה אינה ספיקה.*

1. *כיוון ראשון: תקפה אינה ספיקה*

*נניח בשלילה ש- ספיקה. כלומר קיימת השמה v כך ש- , לכן*

*כלומר:*

*בעצם קיבלנו שקיימת השמה v שלא מספקת את F,אך לפי ההנחה F תקפה, ולפי ההגדרה – נוסחה היא ספיקה אם כל השמה מספקת אותה, ולכן הגענו לסתירה. כלומר ההנחה שלנו בשלילה לא נכונה, ולכן אינה ספיקה כנדרש.*

1. *כיוון שני: תקפה אינה ספיקה*

*נניח בשלילה ש-F לא תקפה. כלומר קיימת השמה v שלא מספקת את F : ,*

*לכן , וקיבלנו שקיימת השמה vשמספקת את , אך הנחנו ש- אינה ספיקה, כלומר לא קיימת השמה שמספקת אותה, ולכן קיבלנו סתירה. כלומר, ההנחה שלנו בשלילה לא נכונה, ולכן F תקפה כנדרש.*